

ESTATÍSTICA DE DADOS DIRECIONAIS APLICADA À DETERMINAÇÃO DAS DIREÇÕES DAS TENSÕES *IN SITU* EM MACIÇOS ROCHOSOS

Elysio R. F. Ruggeri*

João Luiz Armelin**

Alessandro Jesus Guimarães***

RESUMO: Muitos problemas práticos estão associados a uma direção; mas esta, em cada caso, não deve ser definida de modo determinístico (com uma única medida) uma vez que apresenta certa aleatoriedade. Em geral os maciços rochosos apresentam-se fraturados segundo famílias de planos aproximadamente paralelos, cuja normal comum a cada família não pode ser definida com uma única medição. O presente artigo expõe didaticamente apenas uma pequena teoria que mostra como calcular uma direção média e uma variância para uma dada lista de vetores coplanares definidores de uma mesma direção. Apresenta, ainda, uma aplicação da mesma ao caso concreto de determinação de tensões *in situ*, por ensaios de fraturamento hidráulico e análises de *breakouts* em um maciço rochoso no qual foi escavado um túnel para uma hidrelétrica.

ABSTRACT: Many practical problems are associated with a direction; however, this direction, in each case, should not be defined deterministically (with a single measurement) since it presents a certain randomness. In general, rock masses are fractured according to families of approximately parallel planes, whose common normal to each family cannot be defined with a single measurement. This article didactically presents only a small theory that shows how to calculate a mean direction and a variance for a given list of coplanar vectors defining the same direction. It also presents an application of the same theory to the specific case of determining *in situ* stresses, by hydraulic fracturing tests and analysis of breakouts in a rock mass in which a tunnel was excavated for a hydroelectric plant.

Palavras chave: estatística de direções, tensões *in situ*, fraturamento hidráulico, *breakouts* .

Keywords: *direction statistics, in situ stresses, hydraulic fracturing, breakouts.*

* Eng. Civil - *In Memoriam*

** Eng. Geol., Dr., Global Transition Serviços de Engenharia Ltda.

*** Eng. Geol., MSc., Geosol Geologia e Sondagens S/A

1. INTRODUÇÃO

Do ponto de vista matemático, uma direção pode ser especificada por um vetor unitário \hat{u} e este pode ser referido a um sistema cartesiano de coordenadas retilíneas XYZ pelos seus cossenos diretores, isto é, cossenos dos ângulos que \hat{u} faz com os eixos X, Y e Z. Trataremos aqui apenas das direções contidas num plano ao qual associamos os eixos X e Y (Figura 1), caso em que poderemos escrever:

$$\hat{u} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}, \quad (01),$$

os unitários fixos \hat{i} e \hat{j} estando associados a X e Y, respectivamente, j sendo, por definição, o ângulo que \hat{u} faz com Ox. Por convenção, j tem valor positivo quando o unitário \hat{i} deve ser rodado no sentido positivo (também dito trigonométrico, ou antihorário) para que coincida com \hat{u} ; nesse caso, seno e cosseno são números ambos positivos. O ângulo j terá valor negativo no caso contrário ao anterior (\hat{i} deve ser rodado no sentido negativo ou horário), sendo então seu co-seno positivo e seu seno negativo. Em geral, $0 \leq |\theta| \leq 360^\circ$ e dado em graus, como de costume; mas poderá ser expresso em radianos e, por algum motivo particular, pode ter módulo variando entre 0 e 90° , por exemplo.

Entretanto, para a aplicação interessada – ensaio de fraturamento hidráulico e *breakouts*, cujo resultado principal está esquematizado na Figura 1 - os dados originais [1] são medidas de arcos de circunferência de raio r igual ao raio do furo.

A fratura produzida, contida num plano vertical por hipótese, deixa dois traços no papel que envolve o cilindro utilizado no ensaio: são as linhas T_1 e T_2 , descontínuas em geral, aproximadamente verticais, retilíneas e paralelas indicadas na Figura 1. O papel de impressão é destacado do cilindro pela mesma geratriz do ponto G – a geratriz de montagem – escolhida para fixá-lo antes do ensaio; ele é um retângulo de lados OG e $2\pi r$, projeção do eixo furo dividindo-o em áreas iguais. A cada ponto P_{1i} ($i=1,2, \dots$) do traço T_1 (em diferentes profundidades) corresponde um arco a_{1i} de circunferência seção e um ângulo central φ_{1i} . No papel planificado, instalamos um eixo Oz (a geratriz de montagem do papel) que, evidentemente, é coincidente com uma de suas margens, digamos a esquerda. Sobre a outra margem instalamos um eixo Ox de mesma escala que o anterior, com o sentido indicado na Figura 1. O ponto P_{1i} terá então, nesse sistema, abscissa igual ao comprimento do arco a_{1i} e ordenada igual à sua altura em relação ao plano horizontal relativo a O. O ponto P_{2i} , do traço T_2 , de mesma altura que o anterior, tem por abscissa o comprimento do arco a_{2i} determinado nas mesmas condições do anterior, diferindo do anterior de um comprimento aproximadamente igual a πr .

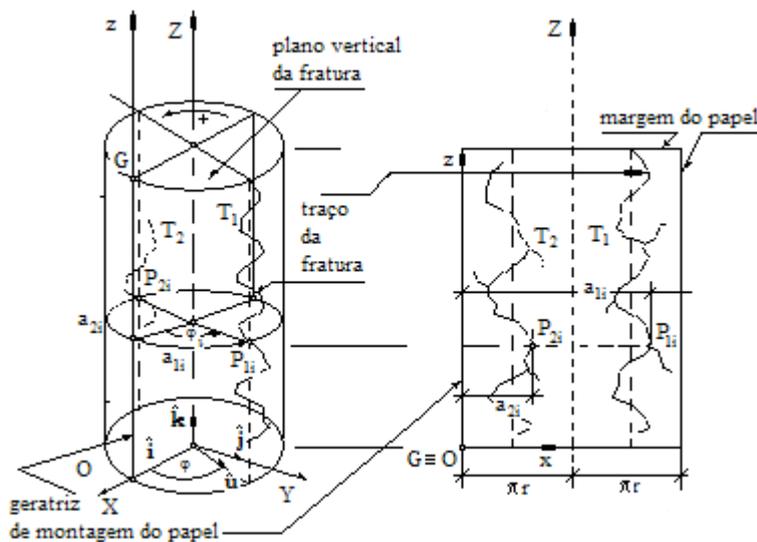


Figura 1

Figura 1 – Principal resultado dos ensaios de fraturamento hidráulico e análise de *breakouts*: os traços T_1 e T_2 da fratura produzida (linhas sinuosas), registrados no papel já planificado que envolve o cilindro utilizado, e o sistema de coordenadas xOz adotado para a extração das coordenadas de alguns de seus pontos.



Figura 2 – À esquerda, realce do traço da fratura com caneta. À direita, borracha de impressão das fraturas geradas nos ensaios de faturamento hidráulico mostrando dois conjuntos de traços de fraturas verticais dispostos a 180° um do outro. Notar o traço na forma de um arco, de uma fratura inclinada, pré-existente, à meia altura da borracha.

Aos arcos a_{1i} e a_{2i} correspondem ângulos centrais φ_{1i} e φ_{2i} ; e aqueles compõem a lista de dados, ponto de partida neste artigo. Subtraindo-se πr dos arcos relativos aos pontos de T_2 , obtêm-se novos arcos $a'_i = \pi r - a_{2i}$ que, evidentemente, testemunham as mesmas direções. O mesmo com relação aos ângulos centrais: $\varphi'_i = \pi - \varphi_{2i}$. A cada ângulo φ_{1i} ou φ'_i corresponde, assim, um raio vetor horizontal (pois é perpendicular ao eixo do furo), de vetor unitário \hat{u}_i que poderá estar situado em qualquer semi-espaco definido pelo plano da fratura que se quer caracterizar. Nestes ensaios com fratura vertical, a diferença entre o menor e o maior desses ângulos – a *amplitude* da amostra da população de direções – em geral não ultrapassa $\pi/2$ rad.

2. PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Um cálculo simplificado da média e do desvio padrão da amostra pode definir com boa aproximação a orientação do plano da fratura e isto pode satisfazer plenamente do ponto de vista prático.

2.1 Aplicação

Para a amostra de comprimentos (em mm) de 67 arcos apresentada na Tabela 1 [1], tem-se a média $\bar{\varphi} = 1,938$ rad para os ângulos centrais e o desvio padrão $\sigma = 0,2439$ rad, ou sejam: $\bar{\varphi} \cong 111^\circ$ e $\sigma = 14^\circ$.

Tabela 1. Medidas dos comprimentos dos arcos relativos a pontos dos traços T₁ e T₂ da fratura vertical

Traço T ₁ – arcos a _i (em mm)								Traço T ₂ – arcos a _i ' (em mm)					
1	85.0	11	86.5	21	73.0	31	77.0	1	57.8	11	65.8	21	73.3
2	82.0	12	86.0	22	72.0	32	77.0	2	56.3	12	64.3	22	71.3
3	84.5	13	84.0	23	75.0	33	78.0	3	55.3	13	64.8	23	72.3
4	83.0	14	83.5	24	75.5	34	78.5	4	55.3	14	65.3	24	70.8
5	82.0	15	82.0	25	74.5	35	78.5	5	58.3	15	62.3	25	72.3
6	80.0	16	83.0	26	75.0	36	80.0	6	57.8	16	64.8	26	70.8
7	83.0	17	81.5	27	75.5	37	96.0	7	56.8	17	67.3	27	70.3
8	84.5	18	82.5	28	79.0			8	60.3	18	68.8	28	70.3
9	88.5	19	82.5	29	75.0			9	62.3	19	71.3	29	69.3
10	87.0	20	76.5	30	77.0			10	68.3	20	70.3	30	70.3

Pode afirmar-se, por exemplo, que existe 90% de chance do azimute φ (da normal ao plano da fratura) estar compreendido entre $\bar{\varphi} - 1,65\sigma$ e $\bar{\varphi} + 1,65\sigma$, isto é: $88^\circ \leq \text{azimute} \leq 134^\circ$.

3. SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Pode ser esboçado um gráfico no plano horizontal conduzido por O (Figura 1), no qual se indiquem os N vetores unitários \hat{u}_i da amostra, cada um fazendo o ângulo φ_i (ou φ'_i) com o eixo Ox, e imaginar-se traçado o vetor R resultante deles. Por definição [2], a direção do vetor R será dita a **direção média** da amostra e tem, evidentemente, a mesma direção do vetor $\bar{R} = R/N$. Um raciocínio geométrico simples permite concluir que o vetor \bar{R} não é unitário; é denominado o **módulo médio** da direção resultante. Sendo, então:

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \hat{i} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \hat{j},$$

tem-se:

$$|\bar{R}|^2 = \bar{C}^2 + \bar{S}^2, \text{ com } \bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \text{ e } \bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i .$$

Denotando por φ_0 a inclinação de R sobre Ox obtém-se:

$$\cos \varphi_0 = \frac{\bar{C}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{C}}{|\bar{R}|} \text{ e } \sin \varphi_0 = \frac{\bar{S}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{S}}{|\bar{R}|}, \quad (02),$$

Sendo, $\bar{\varphi} = \frac{(\sum_{i=1}^N \varphi)}{N} \neq \sin \varphi_0$ porque $\cos \bar{\varphi}_0 = \frac{\varphi_1}{N} + \frac{\varphi_2}{N} + \dots \neq \frac{1}{N}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \dots$

Chama-se **dispersão** da medida φ_i , e se denota por ξ_i , o menor dos ângulos (suplementares) que essa direção faz com certa direção de inclinação α sobre o eixo Ox . Como $1 - \cos \xi_i$ é uma função monotonicamente crescente de ξ_i – quanto mais cresce ξ_i maior se torna $(1 - \cos \xi_i)$ – adota-se a média D das dispersões,

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [1 - \cos (\varphi_i - \alpha)], \quad (03),$$

como a medida da dispersão das direções φ_1 .

Pode ser demonstrado que o menor valor de D é calculado por (03) quando se adota $\alpha = \varphi_1$. Pois se devemos procurar o menor valor de D dado por (03), basta derivar D em relação a α e igualar o resultado a zero, o que dará $\sum_{i=1}^N \sin (\varphi_i - \alpha) = 0$. Efetuando as somas indicadas obtém-se: $(\sum_{i=1}^N \sin \varphi_i) \cos \alpha - (\sum_{i=1}^N \cos \varphi_i) \sin \alpha = 0$ donde, considerando os resultados anteriores: $\alpha = \varphi_0$.

Denotando por S_0 a dispersão em relação a φ_0 , de (03) deduz-se:

$$S_0 = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos (\varphi_i - \varphi_0), \text{ ou seja, } S_0 = 1 - |\bar{R}|,$$

donde:

$$|\bar{R}| = 1 - S_0 \quad (04).$$

De fato, pois

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos (\varphi_i - \varphi_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\cos \varphi_i \cos \varphi_0 - \sin \varphi_i \sin \varphi_0) = \cos \varphi_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i + \sin \varphi_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i,$$

ou,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos (\varphi_i - \varphi_0) = \cos \varphi_0 \bar{C} + \sin \varphi_0 \bar{S},$$

donde, considerando as fórmulas (02): donde, considerando as fórmulas (02):

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos (\varphi_i - \varphi_0) = \cos^2 \varphi_0 |\bar{R}| + \sin^2 \varphi_0 |\bar{R}| = |\bar{R}|.$$

O número S_0 é **chamado variância** circular das direções, sendo, evidentemente: $0 \leq S_0 \leq 1$.

3.1 Mudança de variáveis

Para que os resultados se tornem mais amigáveis é conveniente efetuar-se uma mudança de variáveis. Pondo (adotando a notação \ln para logaritmos neperianos):

$$(S_0)^2 = \ln \frac{1}{|\bar{R}|^2}, \text{ deduzimos: } (S_0)^2 = -2 \ln(1 - S_0) = -2 \ln|\bar{R}|,$$

donde a mudança

$$S_0 = \sqrt{-2 \ln|\bar{R}|}, \quad (05),$$

mudança essa sempre possível porque sendo $|\bar{R}| \leq 1$ será sempre $\ln|\bar{R}| \leq 0$, o que acarretará radicando sempre positivo. Por (05) vemos que para $S_0 = 0$ é $s_0 = 0$; e para $S_0 = 1$ é $S_0 = \infty$. Logo $0 \leq s_0 \leq \infty$. Encontramos, assim, um intervalo para S_0 coincidente com o da “variância clássica”.

Para a utilização de (05) devemos considerar o intervalo dentro do qual os φ_1 de fato variam; no exemplo que nos interessa, esse intervalo é $\pi/2$. É seguro, porém, que os φ_1 variam entre um φ_{menor} e um φ_{maior} . Então existirá um n tal, que $\varphi_{maior} - \varphi_{menor} = \pi/2n$. Então será:

$$S_0 = \frac{1}{2n} \sqrt{-2 \ln|\bar{R}|}, \quad (06),$$

3.2 Aplicação:

Para a lista relativa à Tabela 1, tem-se: $\bar{C} = -034963, \bar{S} = 0,905922$, o que dá $\varphi_0 = 111^\circ$, acidentalmente coincidente com o encontrado pelo primeiro método. Como $\varphi_{maior} - \varphi_{menor} = 1,06824 \text{ rad} = \pi/2n$, tem-se: $n = 1,47045$. Sendo, ainda, $|\bar{R}| = 0,971049$, vem, conforme (06): $S_0 = 0,164846 \text{ rad}$, ou seja, $S_0 \cong 9^\circ$.

Pelo segundo método, o desvio padrão a calcular dependerá do intervalo de variação aceitável para os ângulos φ . Se esse intervalo pudesse ser de $2\pi/3$ (ou 120°) n seria igual a 1,9606, o que daria $S_0 \cong 12^\circ$.

4. CONCLUSÃO

Os métodos apresentados são distintos. O primeiro apresenta grande simplicidade por tratar-se de uso comum. O segundo método, nada complicado, pode satisfazer melhor o analista porque este, avaliando melhor e criteriosamente o intervalo aceitável para variação dos ângulos, obterá um desvio padrão mais real. Não é difícil ampliar as duas soluções para o caso tridimensional, mas o segundo método poderá ter maior representatividade.

Quando o plano da fratura não é vertical, o traço da fratura, visível no papel de impressão, é uma elipse; e a especificação da normal ao plano dessa elipse é a solução do problema.

5. AGRADECIMENTOS

Este artigo é uma homenagem póstuma ao Eng. Civil Elysio Roberto Figueiredo Ruggeri pela sua inestimável contribuição ao tema aqui apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] – ARMELIN, J. L., (2007) - Relatório DCT.C.MR.004.2007-R0 - FURNAS CENTRAIS ELÉTRICAS S.A. - AHE Simplício - Determinação do estado de tensões *in situ* pelo método do fraturamento hidráulico (não publicado).

[2] – MARDIA, K. V. (1972) - Statistics of directional data, Academic Press, ISBN 0-12-471150-2, Chapter 2, London.