

## ESTUDO DE UM MODELO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O FENÔMENO DE EROÇÃO EM MEIOS POROSOS

Christiane Barbara Sant'Ana <sup>1</sup>; Júlio César Santos Nascimento <sup>2</sup>; Paulo Gustavo Cavalcante Lins <sup>3</sup>

**Resumo** – Um modelo de erosão em meios porosos é discutido. O modelo foi proposto originalmente para estudo do processo de produção de areia em poços de petróleo. Este modelo considera a ocorrência de uma equação de balanço de massa e uma lei de evolução da porosidade. O sistema de equações governantes é discretizado usando o método de diferenças finitas, considerando os esquemas explícito e *upwind* de primeira ordem para discretização temporal e espacial, respectivamente. As equações de diferenças finitas foram implementadas em um código em MATLAB. O modelo pode ser solucionado utilizando condições de contorno de Newmann, que representa uma condição de “piping” (erosão interna) ou com condições de contorno de Dirichlet, que representa uma condição de erosão superficial. As simulações com condição de contorno de erosão superficial se mostraram coerentes com os resultados da literatura. As simulações com condições de contorno de “piping” apresentam resultados com um aumento catastrófico da porosidade após um tempo crítico. Um modelo com condições de contorno de “piping” foi utilizado para realizar uma retro análise da ruptura da barragem de Teton. Os resultados da retro análise se mostraram consistentes com as hipóteses adotadas.

**Abstract** – A model of erosion in porous media is discussed. The model was originally proposed to study the sand production process in oil wells. This model considers the occurrence of a mass balance equation and a porosity evolution law. The system of governing equations is discretized by applying the finite difference method, considering the explicit and upwind schemes for temporal and spatial discretization, respectively. The finite difference equations were implemented in a MATLAB code. The model can be solved using Newmann boundary conditions, which represent a “piping” condition (internal erosion) or with Dirichlet boundary conditions, which represent a superficial erosion condition. The simulations with surface erosion boundary condition were consistent with the available in the literature. Simulations with piping boundary conditions show results with a catastrophic increase in porosity after a critical time. A model with piping boundary conditions was used to perform a back analysis of the rupture of the Teton dam. The results of the back analysis were consistent with the hypotheses adopted.

**Palavras-Chave** – Erosão; diferenças finitas; produção de areia, “piping”.

---

<sup>1</sup> Estudante Eng. Minas, Universidade Federal da Bahia: Salvador - BA, (71) 3283-9847, chris.20.10@hotmail.com

<sup>2</sup> Prof., Dr, Universidade Federal da Bahia: Salvador - BA, (71) 3283-9511, jcsnascimento@ufba.br

<sup>3</sup> Prof., Dr, Universidade Federal da Bahia: Salvador - BA, (71) 3283-9847, plins@ufba.br

## 1. INTRODUÇÃO

O fenômeno de erosão em meios porosos é uma questão importante para vários problemas de Engenharia. Na engenharia de petróleo está relacionado com o processo de “produção de areia” nos poços de produção. Na engenharia de barragens está associado ao fenômeno de “piping” (erosão interna) no corpo ou na fundação de barragens de terra.

O objetivo geral do trabalho é estudar um modelo matemático unidimensional de produção de areia por meio da implementação de uma solução numérica usando o método de diferenças finitas, considerando os esquemas explícito e *upwind* de primeira ordem para discretização temporal e espacial, respectivamente. O objetivo específico do trabalho é aplicar o modelo proposto para realizar uma retro análise da ruptura por “piping” da Barragem de Teton. Na seção 5 é feita uma contextualização do acidente da referida barragem.

## 2. MODELO ESTUDADO

No presente trabalho é estudado o modelo de Vardoulakis et al. (1996), para o problema de produção de areia em poços de petróleo. Vardoulakis et al. (1996) examinam o aspecto hidromecânico do problema de produção de areia e estabelece as bases do modelo matemático; o meio poroso considerado é constituído de três fases: sólida (s), fluida (ff) e as partículas sólidas fluidificadas (fs), conforme ilustrado na Figura 1. A seguir será apresentada a formulação matemática do modelo assumindo meio poroso unidimensional, solido, fluido e partícula fluidificada incompressíveis.

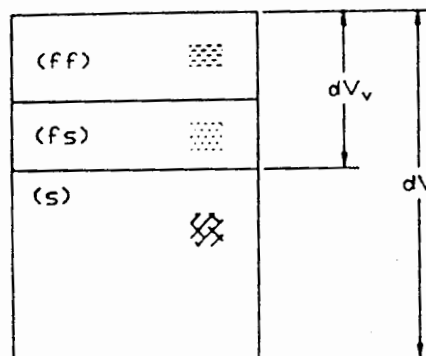


Figura 1. Diagrama de fases para um meio poroso saturado com fluido e partículas fluidizadas (Vardoulakis et al., 1996).

Sendo  $c$  a concentração de partículas fluidificadas,  $\rho_f$  a massa específica do fluido,  $\rho_s$  a massa específica dos sólidos, a massa específica da mistura é dada por:

$$\bar{\rho} = (1 - c) \cdot \rho_f + c \cdot \rho_s \quad (1)$$

Sendo  $\phi$  a porosidade,  $t$  o tempo,  $x$  a posição e  $q$  a vazão, a equação de balanço de massa é dada por:

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial t} = q \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

A lei de evolução da porosidade é dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda \cdot (1 - \phi) \cdot c \cdot q \quad (3)$$

O coeficiente  $\lambda$  possui dimensão de inverso do comprimento [ $L^{-1}$ ] e necessita ser determinado experimentalmente ou por retro análises. O coeficiente  $\lambda$  está provavelmente relacionado com a frequência dos pontos de início da erosão potencial no esqueleto sólido do meio poroso.

Para solução do sistema de equações (2) e (3) são introduzidas transformações para as variáveis de posição e tempo adimensionais:

$$X = \lambda \cdot x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial X} \quad (4)$$

$$T = \lambda \int_0^t q(\tau) d\tau \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \lambda \cdot q \cdot \frac{\partial}{\partial T} \quad (5)$$

Com a transformação das variáveis, o sistema de equações a ser resolvido é:

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial T} = q \frac{\partial c}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial T} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = \lambda \cdot (1 - \phi) \cdot c \cdot q \quad (7)$$

A solução destas equações pode ser feita com condições de contorno de dois tipos: (1) Condições de Newmann, onde  $\partial c / \partial X(L, t) = 0$ , que representa uma condição de “piping” (erosão interna); e (2) Condições de Dirichlet, onde  $c(L, t) = \text{constante}$ , que representa um condição de erosão superficial.

Considerando que  $i$  e  $j$  denotam respectivamente os índices da discretização espacial e temporal, a forma de diferenças finitas do sistema de equações (6) e (7) é dada por:

$$\frac{[c\phi]_{i,j+1} - [c\phi]_{i,j}}{\Delta T} = \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{\Delta X} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta T} \quad (8)$$

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta T} = \lambda \cdot (1 - \phi_{i,j}) \cdot c_{i,j} \quad (9)$$

A permeabilidade  $k$  do meio poroso é tomada como função da porosidade, de acordo com a equação de Carman-Kozeny, pois neste fenômeno se admite que a porosidade varia durante o processo:

$$k = k_o \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (10)$$

Sendo  $\eta_k$  a viscosidade cinemática,  $(p_L - p_0)$  o diferencial de pressão e  $k$  a permeabilidade, a vazão é calculada numericamente pela regra de Simpson, utilizando a expressão:

$$q = \lambda \frac{p_L - p_0}{\eta_k} / \int_0^L \frac{\bar{p}}{k} dX \quad (11)$$

O tempo é calculado numericamente pela regra de Simpson, utilizando a expressão:

$$t = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \frac{dT}{q(T)} \quad (12)$$

### 3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O modelo de Vardoulakis et al. (1996) foi implementado em MATLAB. A Figura 2 mostra um pseudocódigo da implementação, para condições de contorno de Dirichlet. Para condições de contorno de Newmann o fragmento do pseudocódigo está na Figura 3.

```

% Inicialização das variáveis
% Início do processo de cálculo
Para j=1:NTF
  Para i=1:n1
    DphiDT(i)=(1-phi(i))*c(i);
    phi_old(i)=phi(i);
    phi(i)=phi(i)+DphiDT(i)*DT;
    k(i)=k_zero*(phi(i)^3)/((1.0-phi(i))^2);
  FimPara;
  phi_t(j)=phi(1);
  Para i=1:n1
% Impõe condição de Dirichlet, c(L,t) = c_init (5 linhas)
    Se i==n1
      DcDX=(c_init-c(i))/DX;
    Senão
      DcDX=(c(i+1)-c(i))/DX;
    FimSe;
    c(i)=c(i)*phi(i)+(DcDX+DphiDT(i))*DT;
    c(i)=c(i)/phi(i);
  FimPara;
  Para i=1:n1
    ro_barra(i)=(1-c(i))*rof+c(i)*ros;
  FimPara;
% Integra q pela regra de Simpson
  q = lambda * (pL - p0) / eta_k / integral_0^L (p_bar / k) dX
% Para j=1 e 2 integra tempo pela regra do trapézio
% Para j>2 integra tempo pela regra de Simpson
  t = 1/lambda * integral_0^T (dT / q(T))
  FimPara;
% Apresentação dos resultados

```

Figura 2. Pseudo código da implementação computacional. Condições de contorno de Dirichlet.

```

% Impõe condição de Newmann, Dc/DX(L,t) = 0
% Fazendo c(n1+1)=c(n1-1) (5 linhas)
  Se i==n1
    DcDX=(c(n1-1)-c(i))/DX;
  Senão
    DcDX=(c(i+1)-c(i))/DX;
  FimSe;

```

Figura 3. Pseudo código da implementação computacional. Condições de contorno de Newmann.

Uma discussão detalhada sobre o método das diferenças finitas e a imposição das condições de contorno pode ser encontrada em Wang & Anderson (1982).

#### 4. SIMULAÇÕES

Com o código implementado foi realizada uma simulação considerando condições de contorno de Dirichlet. Na simulação foram considerados os seguintes parâmetros:

- Uma barra de comprimento  $L = 1\text{ m}$ .
- Frequência  $\lambda = 10\text{ m}^{-1}$ .
- Porosidade inicial  $\phi = 0,25$ .
- Concentração inicial  $c = 10^{-4}$ .
- Diferencial de pressão  $(p_L - p_0) = 10\text{ MPa}$ .
- Permeabilidade inicial = 27,8 mD.
- Viscosidade cinemática  $\eta_k = 1,787 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$  (água a 0 °C).
- $\rho_f = 1000\text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_s = 2650\text{ kg/m}^3$ .
- $\Delta T = 0,01$ ,  $\Delta X = 0,2$ .

O caso simulado é similar a um exemplo apresentado em Vardoulakis et al. (1996), conforme pode ser observado nas Figuras 4, 5 e 6. Algumas diferenças nos resultados podem ser notadas, mas deve ser destacado que Vardoulakis et al. (1996) não explicitam os valores adotados para viscosidade cinemática, massa específica do fluido e massa específica dos grãos, isto pode justificar as diferenças.

A Figura 4 mostra a concentração no ponto de saída ao longo do tempo, a concentração passa por um máximo e depois diminui. A Figura 5 mostra a porosidade no ponto de saída ao longo do tempo, para tempos maiores a porosidade tende a unidade. A Figura 6 mostra a porosidade ao longo do comprimento da barra, no final da simulação.

Os resultados da simulação para a condição de contorno de Newmann (fenômeno de “piping” ou erosão interna) mostram que para um determinado tempo ocorre um aumento “catastrófico” da porosidade; esse é o tempo crítico, onde se tem uma instabilidade do sistema (Figura 7). Na simulação com as condições de contorno de Newmann foram utilizados os mesmos parâmetros da simulação com as condições de contorno de Dirichlet.

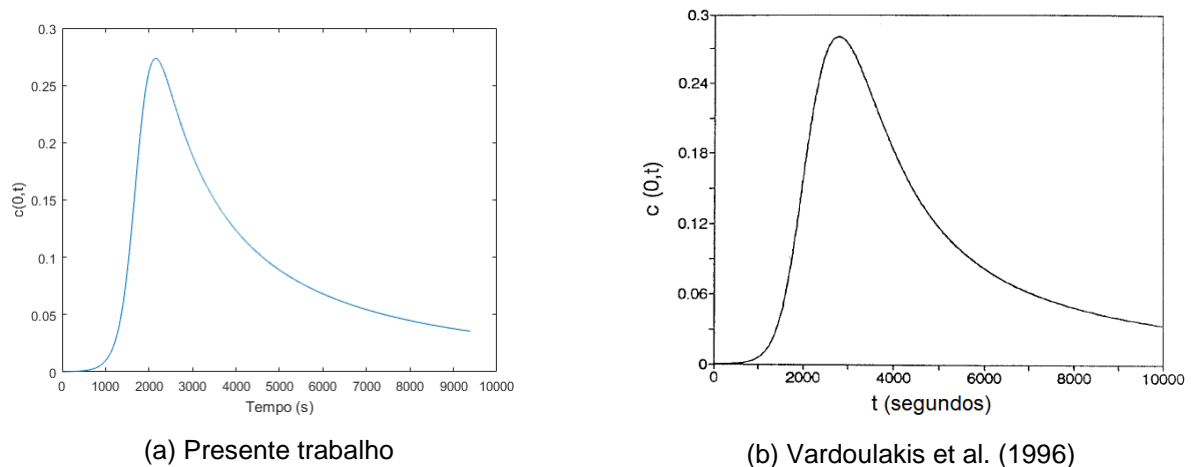
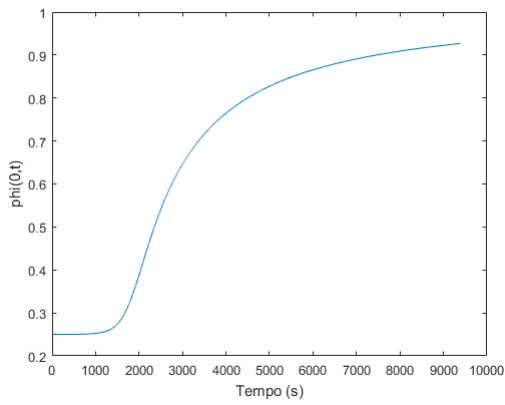
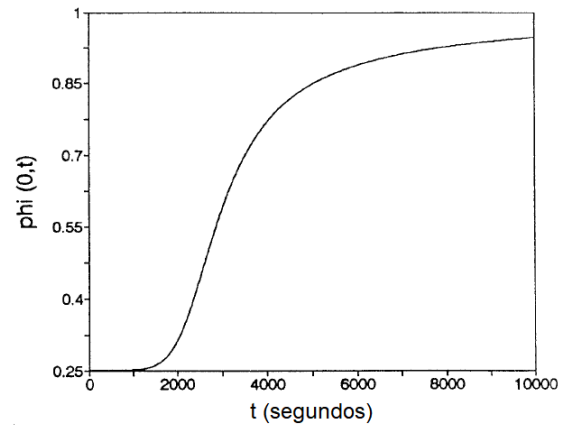


Figura 4. Concentração no ponto de saída ao longo do tempo. Condição de Dirichlet.

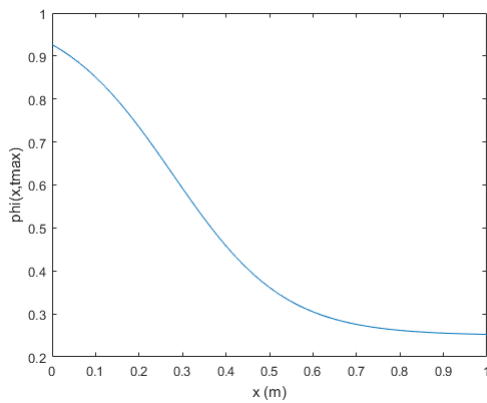


(a) Presente trabalho

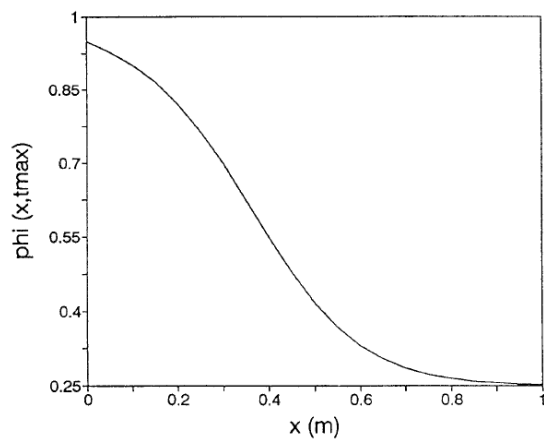


(b) Vardoulakis et al. (1996)

Figura 5. Porosidade no ponto de saída ao longo do tempo. Condição de Dirichlet.



(a) Presente trabalho



(b) Vardoulakis et al. (1996)

Figura 6. Porosidade ao longo do comprimento da barra, no final da simulação. Condição de Dirichlet.

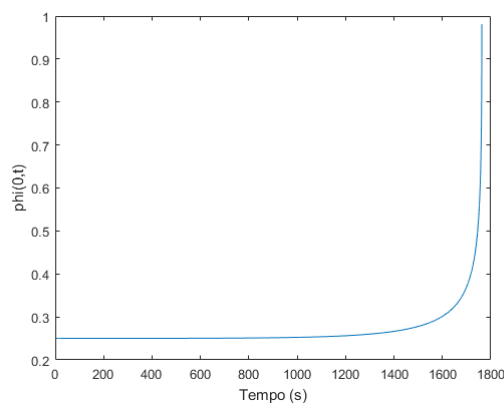


Figura 7. Porosidade no ponto de saída ao longo do tempo. Condição de Neumann.

## 5. SIMULAÇÃO DA RUPTURA DA BARRAGEM DE TETON

A Barragem de Teton teve contrato de construção concedido em 1971. O aterro atingiu o topo em 26 de novembro de 1975. O enchimento do reservatório foi iniciado em 3 de outubro de 1975. A barragem rompeu em 5 de junho de 1976. O caso é amplamente documentado na literatura, com

particular referência ao documento do Independent Panel to Review Cause of Teton Dam Failure (1976).

Investigações detalhadas indicaram a possibilidade de uma ruptura por "piping" (erosão interna) ter sido causada por infiltração através de fratura no aterro do núcleo de argila causada por fraturamento hidráulico ou recalques diferenciais (Seed & Duncan, 1987).

No início da manhã de 5 de junho de 1976 uma erosão considerável foi detectada no talude de jusante da barragem. As fotos apresentadas na Figura 8 ilustram a cronologia do processo erosivo.

A hipótese de ter ocorrido um faturamento hidráulico no núcleo da barragem, devido a processos de compactação de juntas úmidas, e a fratura ter se tornado um caminho para a erosão é discutida em Sherard (1987). Um modelo unidimensional de erosão foi adaptado para esta situação, conforme ilustrado na Figura 9.



(a) Cerca de 10:45 a.m.



(b) Cerca de 11:30 a.m.



(c) Cerca de 11:55 a.m.



(d) Início da tarde.

Figura 8. Talude de jusante da barragem de Teton, em 5 de junho de 1976 (Independent Panel to Review Cause of Teton Dam Failure, 1976).

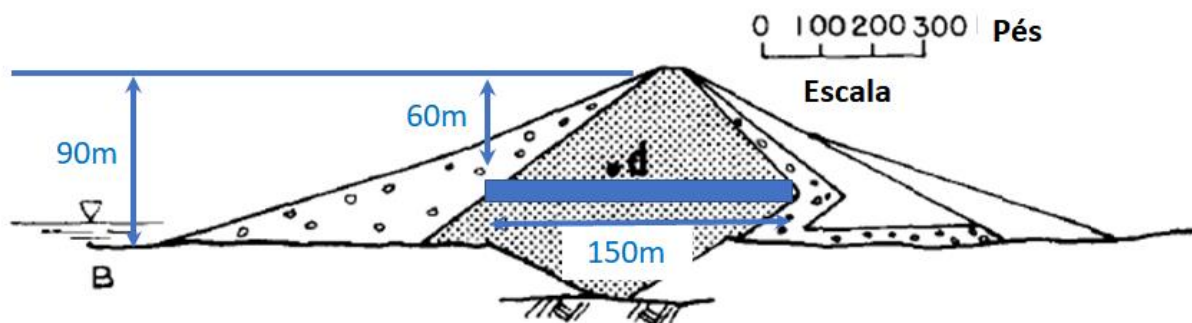


Figura 9. Modelo de erosão unidimensional. Desenho da barragem adaptado de Sherard (1987).

O modelo unidimensional representado na Figura 9, possui como parâmetros:

- Uma barra de comprimento  $L = 150$  m.
- Frequência  $\lambda = 25$  m<sup>-1</sup>.
- Porosidade inicial  $\phi = 0,27$ .
- Concentração inicial  $c = 10^{-4}$ .
- Diferencial de pressão  $(\rho_L - \rho_o) = 0,6$  MPa.
- Permeabilidade inicial = 10 mD.
- Viscosidade cinemática  $\eta_k = 1,004 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s (água a 20 °C).
- $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_s = 2200$  kg/m<sup>3</sup>.
- $\Delta T = 0,01$ ,  $\Delta X = 25$ .

Conforme Sherard (1987) o reservatório teve enchimento em 7 meses, entre novembro de 1975 e em maio de 1976. Por hipótese simplificadora se admitiu que o processo erosivo ocorreu entre primeiro de maio e 5 de junho de 1976. Para um valor de coeficiente  $\lambda = 25$  m<sup>-1</sup>, o processo de erosão catastrófica ocorre em  $3,0516 \cdot 10^6$  s (aproximadamente 35,3 dias). Este valor do coeficiente  $\lambda$  foi retro analisado. A Figura 10 ilustra o resultado do modelo.

Sob as hipóteses adotadas, este modelo se mostra capaz de explicar o mecanismo de ruptura da Barragem de Teton. Para aplicação do modelo em outros casos seria necessário estudos mais detalhado sobre a determinação do coeficiente  $\lambda$ .

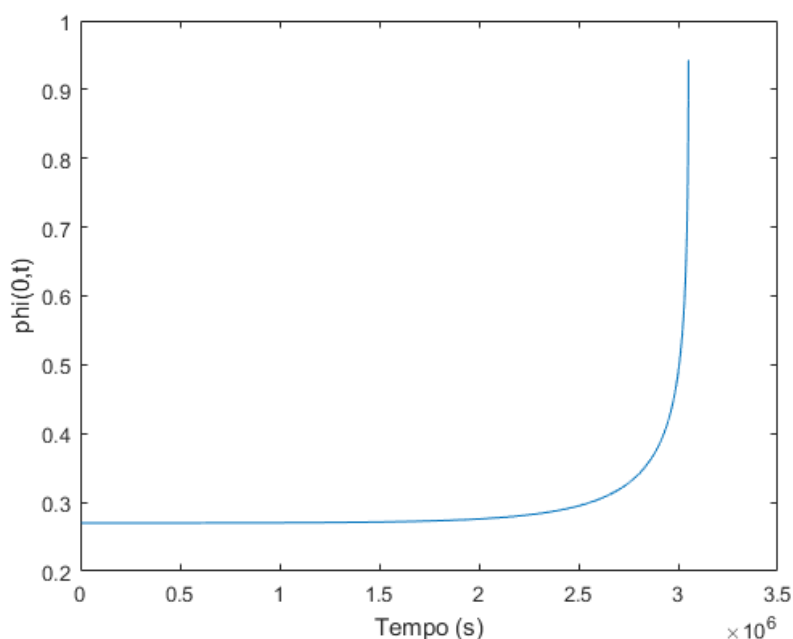


Figura 10. Porosidade no ponto de saída ao longo do tempo. Condição de contorno Neumann. Modelo para a barragem de Teton.

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi implementado e testado uma solução numérica unidimensional para estudar o fenômeno de erosão em meios porosos foi apresentado. O modelo desenvolvido considera uma fase sólida, uma fase fluida e uma fase de partículas sólidas fluidificadas. A implementação



computacional em diferenças finitas da solução do modelo foi realizada com sucesso, vistos que os resultados obtidos são similares aos encontrados na literatura.

A solução do modelo com condição de contorno de Dirichlet representa uma situação de erosão superficial. Para esta condição de contorno a concentração de partículas no ponto de saída passa por um máximo e tende a reduzir com o tempo. A porosidade no ponto de saída aumenta e tende ao valor unitário de forma assintótica. O perfil de porosidade no final da simulação possui valores maiores próximos a saída e de forma suave tende ao valor inicial na outra extremidade do modelo. Este padrão de resultados foi encontrado nas simulações estudadas, conforme esperado, atingindo assim o objetivo geral do trabalho.

A solução do modelo com condição de contorno de Neumann representa uma condição de "piping" (erosão interna). Com esta condição de contorno após ocorre um aumento "catastrófico" da porosidade. O parâmetro escalar  $\lambda$  da lei de evolução da porosidade define o referido tempo aumento "catastrófico" da porosidade. Este tipo de condição de contorno foi utilizado na modelagem da Barragem de Teton.

Finalmente, o modelo proposto foi utilizado para explicar o processo de ruptura por "piping" da barragem de Teton. Um valor do parâmetro escalar  $\lambda$  foi retro analisado para explicar o processo de ruptura da barragem. Os resultados mostraram que, dentro das hipóteses adotadas a solução proposta conseguiu explicar de forma satisfatória o fenômeno de erosão ocorrido na referida barragem. A modelagem permite uma explicação quantitativa para o processo de ruptura, respondendo desta forma ao objetivo específico do trabalho.

## REFERÊNCIAS

INDEPENDENT PANEL TO REVIEW CAUSE OF TETON DAM FAILURE (1976) *Failure of Teton Dam*. Report to the U.S. Department of the Interior and State of Idaho. Disponível em: <https://www.usbr.gov/pn/snakeriver/dams/uppersnake/teton/>

SEED, H.B. & DUNCAN, J.M. (1987) The failure of Teton Dam. in *Engineering Geology*, Vol. 24, No. 1-4. p.173-205.

SHERARD, J.L. (1987) Teton Dam failure. in *Engineering Geology*, Vol. 24, No. 1-4. p. 283-293.

VARDOULAKIS, I.; STAVROPOULOU, M. & PAPANASTASIOU, R. (1996) Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem. in *Transport in Porous Media*, Vol. 22, p.225-244.

WANG, H.F. & ANDERSON, M.P. (1982) *Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods*. Academic Press, San Diego. 237p.